Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

8η Εβδομάδα

Γραμμικά Συστήματα Πρώτης Τάξης

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος πρώτης τάξης είναι

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \tag{0.1}$$

ή, πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t),\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).
\end{aligned}$$

Θα συμβολίσουμε με $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ τον πίνακα συντελεστών του (0.1), δηλαδή

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

με

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα των άγνωστων συναρτήσεων και με

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα των δεύτερων μέρων των εξισώσεων του συστήματος (0.1). Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς θα ξαναγράψουμε την (0.1) σε μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \;\text{ ή }\; \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{0.2}$$

εδώ παίρνουμε τα διανύσματα ως στήλη και όχι ως γραμμή ε.ω. το γινόμενο πίνακας επί διάνυσμα να μας δώσει το (0.1). Προφανώς το διάνυσμα μπορούμε να το γράφουμε και ως στήλη και ως γραμμή. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι $a_{ij}(t)$ και $f_i(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις αμέσως έχουμε το θεώρημα ολικής ύπαρξης και μοναδικότητα της λύσης για την (0.2) με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{x}(t_0) = c \tag{0.3}$$

αφού η

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.3 Κεφάλαιο 3. Πράγματι, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει στο προηγούμενο κεφάλαιο,

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \ \ \text{με} \ \ K = \max_{t \in [a,b]} \|\mathbf{A}(t)\|$$

όπου $\|\mathbf{A}(t)\|$ είναι το μέτρο (νόρμα) του πίνακα $\mathbf{A}$. Αρα ισχύει το εξής

Θεώρημα 0.1. *Αν οι συναρτήσεις $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i, j = 1, ..., n$ είναι συνεχείς στο $|t - t_0| \leq T$, τότε το πρόβλημα Cauchy (0.2), (0.3) έχει μία και μοναδική λύση στο $|t - t_0| \leq T$.*

Προφανώς, αν οι συναρτήσεις $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbf{R}$, τότε υπάρχει μοναδική λύση στο $|t - t_0| < +\infty$ δηλαδή σε όλο το $\mathbf{R}$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την κατασκευή της γενικής λύσης της εξίσωσης (0.2). Πάντα θα υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $a_{ij}(t)$ και $f_i(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα όπου μελετάμε το σύστημα, δηλαδή πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 0.1.

Όπως και για μια εξίσωση *γενική λύση* του συστήματος (0.2) είναι ένας τύπος που περιέχει όλες τις λύσεις του συστήματος και η *μερική (ή ειδική) λύση* είναι μία συγκεκριμένη λύση του συστήματος (0.2).

Θα αναφέρουμε κάποιες έννοιες από την Γραμμική Άλγεβρα οι οποίες θα μας χρειαστούν στην μελέτη συστημάτων με σταθερούς συντελεστές. Έστω $\mathbf{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή όλα τα a_{ij} είναι σταθερες. Με $\mathbf{I}$ συμβολίζεται ο μοναδιαίος πίνακας. Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ την οπόια την συμβολίζουμε

$$det(\mathbf{A} - k\mathbf{I}) \ \ \text{ή} \ \ \left|\mathbf{A} - k\mathbf{I}\right|$$

ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο (ως προς k). Οι ρίζες k_i του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα και τα μη μηδενκά διανύσματα $\mathbf{v}_i$ που επαληθεύουν το αλγεβρικό συστημα

$$(\mathbf{A} - k_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0$$

ονομάζονται ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή k_i. Το διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης m αν

$$(\mathbf{A} - k_i\mathbf{I})^m\mathbf{v}_i = 0 \ \ \text{ενώ} \ \ (\mathbf{A} - k_i\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{v}_i \neq 0.$$

Αν ο πίνακας με σταθερούς συντελεστές είναι συμμετρικός (ήτοι $a_{ij} = a_{ji}$ για $i \neq j$), τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και σε ιδιοτιμή πολλαπλότητας $m \leq n$ αντιστοιχούν m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε ένα συμμετρικό πίνακα 2×2:

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{array} \right)$$

με διπλή ιδιοτημή k_0, τότε αναγκαστικά $a_{11} = a_{22}$ και $a_{12} = 0$ δηλαδή ο πίνακας είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right).$$

Πράγματι, για $n = 2$

$$det(\mathbf{A} - k\mathbf{I}) = k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Συνεπώς, για να είναι η ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (ενός συμμετρικού πίνακα 2×2) διπλή πρέπει

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{11} = a_{22} \ \text{ και } \ a_{12} = 0.$$

§ 1. Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Αν $\mathbf{f}(t) \equiv 0$, τότε λέμε ότι το σύστημα (0.2) είναι ομογενές, αλλιώς λέμε ότι το σύστημα είναι μη ομογενές. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \tag{1.1}$$

Έστω έχουμε m λύσεις του (1.1)

$$\mathbf{x}^{[1]}(t) = \left[\begin{array}{c} x_1^{[1]}(t) \\ x_2^{[1]}(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n^{[1]}(t) \end{array} \right], \cdots, \mathbf{x}^{[m]}(t) = \left[\begin{array}{c} x_1^{[m]}(t) \\ x_2^{[m]}(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n^{[m]}(t) \end{array} \right].$$

Τότε η (διανυσματική) συνάρτηση

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t)$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των λύσεων αυτών. Εδώ $C_1, \ldots, C_m$ είναι αυθαίρετες σταθερές. Πιο αναλυτηκά

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t) = \left[\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{m} C_k x_1^{[k]}(t) \\ \sum_{k=1}^{m} C_k x_2^{[k]}(t) \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{k=1}^{m} C_k x_n^{[k]}(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C_1 x_1^{[1]}(t) + \cdots + C_m x_1^{[m]}(t) \\ C_1 x_2^{[1]}(t) + \cdots + C_m x_2^{[m]}(t) \\ . \\ . \\ . \\ C_1 x_n^{[1]}(t) + \cdots + C_m x_n^{[m]}(t) \end{array} \right].$$

Θεώρημα 1.1. *Ο γραμμικός συνδυασμός λύσεων του ομογενούς συστήματος είναι επίσης λύση αυτού του συστήματος.*

Απόδειξη. Έστω έχουμε m λύσεις του ομογενούς συστήματος δηλαδή

$$\frac{dx_i^{[k]}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{[k]} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Αντικαθιστούμε το $\mathbf{x}(t)$ με $\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}$ στην (1.1)

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{A}\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]} = \sum_{k=1}^{m} C_k (\frac{d\mathbf{x}^{[k]}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{[k]}) = 0,$$

η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή κάθε $\mathbf{x}^{[k]}$ είναι λύση της (1.1).

□

Θεώρημα 1.2. *Αν η $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος τότε και το πραγματικό μερος $\mathbf{u}(t)$ και το φανταστικό μέρος $\mathbf{v}(t)$ είναι επίσης λύσεις αυτού του συστήματος.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$0 = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{x} = (\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{u}) + i(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{v}),$$

άρα

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{v} = 0.$$

Ορισμός. *Διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, m$ ονομάζονται γραμμικά εξαρτημένες σε ένα διάστημα, αν υπάρχουν σταθερές $C_1, \ldots, C_m$, ανάμεσα στις οποίες τουλάχιστον μια είναι διάφορη του μηδενός, τέτοιες ώστε στο διάστημα αυτό λαμβάνει χώρα η ταυτότητα:*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t) \equiv 0.$$

Αλλιώς, ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες.

Η ορίζουσα

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^{[1]}(t) \cdots x_1^{[n]}(t) \\ x_2^{[1]}(t) \cdots x_2^{[n]}(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n^{[1]}(t) \cdots x_n^{[n]}(t) \end{vmatrix}$$

ονομάζεται Βρονσκιανή του συστήματος διανυσματικών συναρτήσεων

$$x^{[1]}, \ldots, x^{[n]}.$$

□

Θεώρημα 1.3. *Αν οι $\mathbf{x}^{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[n]}(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες σε ένα διάστημα, τότε η Βρονσκιανή στο διάστημα αυτό ισούται με μηδέν.*

Απόδειξη. Από την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι εάν ένας πίνακας έχει γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ή στήλες, τότε η ορίζουσά του ισούται με μηδέν. Το θεώρημα είναι άμεσο πόρισμα αυτού του ισχυρισμού.

□

Θεώρημα 1.4. *Αν η Βρονσκιανή των (διανυσματικών) συναρτήσεων*

$$\mathbf{x}^{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[n]}(t),$$

οι οποίες είναι λύσεις του (1.1) σε ένα διάστημα (a, b), μηδενίζεται σε κάποιο σημείο $t = t_0 \in [a, b]$, τότε οι $\mathbf{x}^{[1]}, \ldots, \mathbf{x}^{[n]}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο διάστημα αυτό.

Απόδειξη. Έστω $W(t_0) = 0$. Τότε τα διανύσματα $\mathbf{x}^{[1]}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{[n]}(t_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, επομένως υπάρχουν τέτοιες σταθερές $C_1^*, \ldots, C_n^*$, ανάμεσα στις οποίες τουλάχιστον μια είναι διάφορη του μηδενός, ώστε

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t_0) = 0.$$

Κατασκευάζουμε την

$$\mathbf{x}^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t). \tag{1.2}$$

Έχουμε αποδείξει (βλ. Θεώρημα 1.1) ότι η (1.2) είναι λύση του συστήματος (1.1) και στο $t = t_0$, $\mathbf{x}^*(t_0) = 0$. Από το θεώρημα μοναδικότητας προκύπτει ότι υπάρχει μόνο μια συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\mathbf{x}^*(t_0) = 0$. Είναι προφανές ότι αυτή η συνάρτηση είναι η μηδενική συνάρτηση, επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t) \equiv 0, \quad t \in [a, b].$$

□

Πόρισμα 1. Αν η Βρονσκιανή μηδενίζεται σε ένα σημείο $t_0 \in [a, b]$, τότε είναι μηδέν σε όλο το διάστημα $[a, b]$. Υπενθυμίζω ότι το $[a, b]$ είναι το διάστημα ύπαρξης των $\mathbf{x}^{[1]}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{[n]}(t)$.

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 1.4 και το άνω Πόρισμα 1 ισχύουν μόνο για Βρονσκιανές των διανυσματικών συναρτήσεων που αποτελούν λύσεις του συστήματος (1.1).

Ορισμός. *Το σύστημα n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων του συστήματος*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

ονομάζεται θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Θεώρημα 1.5. *Θεμελιώδη συστήματα λύσεων υπάρχουν.*

Απόδειξη. Θα επιλέξουμε n^2 αριθμούς $\gamma_i^{[k]}$ τέτοιους ώστε

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^{[1]} & \cdots & \gamma_1^{[n]} \\ \gamma_2^{[1]} & \cdots & \gamma_2^{[n]} \\ & \cdots & \\ \gamma_n^{[1]} & \cdots & \gamma_n^{[n]} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.3}$$

Μπορούμε να ικανοποιήσουμε την (1.3) θέτοντας π.χ.:

$$\gamma_i^{[k]} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Θα κατασκευάσουμε n λύσεις $\mathbf{x}^{[k]}$, οι οποίες παίρνουν στο σημείο $t = t_0$ τις τιμές

$$x_i^{[k]}(t_0) = \gamma_i^{[k]}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Αφού στο $t = t_0$ η Βρονσκιανή έχει την μορφή (1.3) και διαφέρει από το μηδέν, άρα θα πάρουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4 (Πόρισμα 1).

□

Θεώρημα 1.6. *Έστω ότι* $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ *είναι θεμελιώδες σύστημα λύσεων του (1.1). Τότε οποιαδήποτε λύση του (1.1) μπορεί να παρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός των* $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, *με κατάλληλες σταθερές* C_k, *δηλαδή σε μορφή*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{x}_1(t), ..., \tilde{x}_n(t))$ είναι μια λύση του συστήματος (1.1). Σε κάποιο σημείο t_0 του πεδίου ορισμού της η λύση αυτή παίρνει κάποια τιμή, έστω $\mathbf{c}_0 = (c_{01}, ..., c_{0n})$, δηλαδή

$$(\tilde{x}_1(t_0), ..., \tilde{x}_n(t_0)) = (c_{01}, ..., c_{0n}).$$

Αφού $W(t_0) \neq 0$, έχουμε ότι $\mathbf{x}^{[k]}(t_0)$, $k = 1, \ldots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, επομένως υπάρχουν τέτοιες σταθερές C_k^*, $k = 1, \ldots, n$ ώστε

$$\mathbf{c}_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t_0).$$

Παίρνουμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{x}^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

Η $\mathbf{x}^*(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός λύσεων του συστήματος (1.1), άρα είναι λύση αυτού του συστήματος. Λόγω κατασκευής $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{c}_0$, άρα οι συναρτήσεις $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ και $\mathbf{x}^*(t)$ λύνουν το ίδιο πρόβλημα $Cauchy$ και από την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ αμέσως προκύπτει $\mathbf{x}^*(t) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(t)$, συνεπώς

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

□

Με άλλα λόγια το Θεώρημα 1.6 μας λέει ότι η γενική λύση του (1.1) είναι ο γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεως του θεμελιωδους συστήματος.

Θυμίζουμε ότι η γενική λύση του συστήματος (1.1) είναι ένας τύπος που περιέχει όλες τις λύσεις του (1.1) και η μερική (ή ειδική) λύση του (1.1) είναι κάποια λύση του.

§ **2. Μη Ομογενή Γραμμικά Συστήματα**

Θεώρημα 2.1. *Έστω ότι η* $\bar{\varphi}(t)$ *είναι μερική λύση του συστήματος*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{2.1}$$

και $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ *είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων του (1.1). Τότε οποιαδήποτε λύση του συστήματος (2.1) μπορεί να παρασταθεί σε μορφή*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t) + \bar{\varphi}(t), \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \tag{2.2}$$

με κατάλληλη επιλογή των σταθερών C_k.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{x}_1(t), ..., \tilde{x}_n(t))$ είναι μια τυχαία λύση του (2.1) και έστω $\mathbf{c}_0 = (c_{01}, ..., c_{0n})$ είναι η τίμη της σε ένα σημείο t_0 του πεδίου ορισμού της:

$$(\tilde{x}_1(t_0), ..., \tilde{x}_n(t_0)) = (c_{01}, ..., c_{0n}).$$

Θέλουμε να βρούμε κατάλληλες σταθερές C_k ε.ω. η $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ να γράφεται σε μορφή (2.2). Θεωρούμε το εξής αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned}
C_1 x_1^{[1]}(t_0) + C_2 x_1^{[2]}(t_0) + \cdots + C_n x_1^{[n]}(t_0) &= -\varphi_1(t_0) + c_{01},\\
C_1 x_2^{[1]}(t_0) + C_2 x_2^{[2]}(t_0) + \cdots + C_n x_2^{[n]}(t_0) &= -\varphi_2(t_0) + c_{02},\\
&\cdots\\
C_1 x_n^{[1]}(t_0) + C_2 x_n^{[2]}(t_0) + \cdots + C_n x_n^{[n]}(t_0) &= -\varphi_n(t_0) + c_{0n}.
\end{aligned}$$

Αφού $W(t_0) \neq 0$, υπάρχει μοναδική (προφανώς μη μηδενική) λύση $C_1^*, ..., C_n^*$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{x}^*(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t) + \bar{\varphi}(t) \tag{2.3}$$

ή, γράφοντας ανά συνιστώσα,

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) &= C_1 x_1^{[1]}(t) + C_2 x_1^{[2]}(t) + \cdots + C_n x_1^{[n]}(t) + \varphi_1(t),\\
x_2^*(t) &= C_1 x_2^{[1]}(t) + C_2 x_2^{[2]}(t) + \cdots + C_n x_2^{[n]}(t) + \varphi_2(t),\\
&\cdots\\
x_n^*(t) &= C_1 x_n^{[1]}(t) + C_2 x_n^{[2]}(t) + \cdots + C_n x_n^{[n]}(t) + \varphi_n(t).
\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $\mathbf{x}^*(t)$ είναι λύση του (2.1) η οποία στο t_0 ισούται με $\mathbf{c}_0$, το ίδιο ισχύει και την $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, άρα από την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος *Cauchy* έχουμε $\mathbf{x}^*(t) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(t)$, τουτέστιν

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^* \mathbf{x}^{[k]}(t) + \bar{\varphi}(t).$$

□